

Unità di misura e Analisi Dimensionale

Definizione

- L'analisi dimensionale è uno strumento concettuale applicato frequentemente in fisica, chimica, ingegneria e biomeccanica.
- È utilizzata per formare ipotesi su situazioni fisiche complesse che possono essere verificate da esperimenti

Definiamo le dimensioni

- Le dimensioni sono riferite ad una grandezza fisica e sono associate con simboli, come M, L, e T che rappresentano massa, lunghezza, e tempo
- Nell'ambito del Sistema internazionale di misura sono state definite "dimensioni fondamentali"
- Tutte le unità di misura sono riconducibili a queste unità fondamentali

Esempio di dimensioni e di unità di misura in una equazione

- La dimensione della velocità
 - distanza/tempo o L/T .
- La dimensione di una forza
 - massa \times distanza/tempo² o ML/T^2 .
- Le unità sono ad esempio:
 - Per la lunghezza metri, piedi, pollici, miglia o micron; ma qualsiasi lunghezza ha come dimensione L , indipendentemente da quali unità sono arbitrariamente scelte per misurarla.

Fattore di conversione

- Due differenti unità della stessa grandezza fisica hanno fattori di conversione tra loro.
 - Per esempio: $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$; allora (2.54 cm/in) è il fattore di conversione ed è esso stesso senza dimensioni.

- Le dimensioni di una quantità fisica sono associate alla combinazione di Massa Lunghezza Tempo rappresentate dai simboli M, L, T rispettivamente
- Ad esempio le dimensioni della velocità sono: "distanza/tempo" (L/T or LT^{-1}), e della forza "massa \times accelerazione" o "massa \times (distanza/tempo)/tempo" (ML/T^2 or MLT^{-2}).
- Unità di quantità fisiche e le loro dimensioni sono collegate ma non sono lo stesso concetto: la lunghezza può avere come unità i metri i piedi, le miglia i chilometri ma ogni lunghezza ha dimensione L
- Due diverse unità della stessa quantità fisica hanno un fattore di conversione tra loro: $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$; quindi (2.54 cm/in) è detto fattore di conversione, **ed è senza dimensioni!!!!**
- Non esistono fattori di conversione fra dimensioni

Le Formule

- Da queste unità di base se ne possono derivare altre. Sono rappresentate da un insieme di unità di base accoppiate fra loro attraverso moltiplicazioni e/o divisioni.
- Queste relazioni sono separate da punti kg.m.s^{-2} e possono essere scritte in modi diversi.
- Per esempio, l'accelerazione di gravità è approssimativamente 9.81 metri al secondo al secondo e può essere scritta in questi modi:
- 9.81m/s^2 9.81m.s^{-2}

Formule a-dimensionali

- L'analisi dimensionale di ogni equazione deve essere da un punto di vista delle dimensioni **consistente**:
- I termini nelle due parti dell'equazione devono avere le stesse dimensioni
- Ad esempio: la distanza x percorsa nel tempo t da un oggetto che parte da fermo e si muove a costante accelerazione è:
- $x = at^2 / 2.$
- Verifichiamo la consistenza dimensionale:
- Accelerazione è misurata in unità di m/s^2 . Quindi ha dimensioni $[a] = L / T^2$, e quindi i termini dell'equazione sono:
- $L = (L / T^2) * T^2 = L$

Unità per esprimere le quantità misurate

‘Systeme International d’Unites’ (sistema SI) rappresenta un sistema razionale e coerente per misurare e dichiarare quantità fisiche.

Tabella 1. Alcune quantità fisiche di base

Quantità fisiche di base	Simbolo	Nome	SI Unità
Lunghezza	L	metri	m
Massa	M	chilogrammi	kg
Tempo	T	secondi	s
Angolo	α, β, φ	radianti	rad

Sistema Internazionale

Tabella 2. I prefissi usati più' comunemente sono:

Prefisso	Moltiplicatore	Simbolo	Esempio
mega	10^6	M	megawatt (MW)
kilo	10^3	k	kilojoule (kJ)
centi	10^{-2}	c	centimetri (cm)
milli	10^{-3}	m	Milligrammi (mg)
micro	10^{-6}	μ	Microsecondi (μ s)

Table 3. Unità usate comunemente in scienze motorie.

Quantità Fisiche	Simbolo	Unità	Dimensioni
Velocità	v	$m.s^{-1}$	Distanza/tempo
Accelerazione	a	$m.s^{-2}$	Velocità/tempo
Accelerazione di gravità	g	$m.s^{-2}$	Velocità/tempo
Velocità' angolare	α	$rad.s^{-1}$	Angolo/tempo
Accelerazione angolare	$\dot{\alpha}$	$rad.s^{-2}$	Velocità angolare/tempo
Periodo	T	s (Tempo per 1 ciclo)	tempo
Frequenza	f	Hz (Hertz)	Ripetizioni/tempo
Densità'	ρ	$kg.m^{-3}$	Massa/volume
Forza	F	$kg.m.s^{-2}$ o N (Newton)	Massa * accelerazione (a)
Peso	W	N (massa x gravità)	Mass * accelerazione (g)
Momento di una forza	M	N.m	Forza * distanza
Lavoro	W	J (Joule = 1 N.m)	Forza * distanza
Energia	<i>diverse</i>	J	
Potenza	P	W (Watt = 1 J.s ⁻¹)	(Forza * distanza)/tempo

*Unità che si riferiscono a nomi di scienziati sono scritti in lettere capitali (N= Isaac Newton, W= James Watt) tutti gli altri in lettere minuscole.

Il concetto di scala





Il concetto di scala è applicabile ogni qualvolta un sistema è rappresentato proporzionalmente da un altro sistema

Ad esempio la scala di una mappa è aumentata o ridotta da un modello ed indica il rapporto tra le distanze della mappa (o del modello) e la distanza reale.

- Una mappa in scala 1:50,000 mostra una distanza di 50,000 cm (=500 m) come 1 cm sulla mappa

Fattore scalare

E' un numero che scala o moltiplica una quantità:

$$y=Cx$$

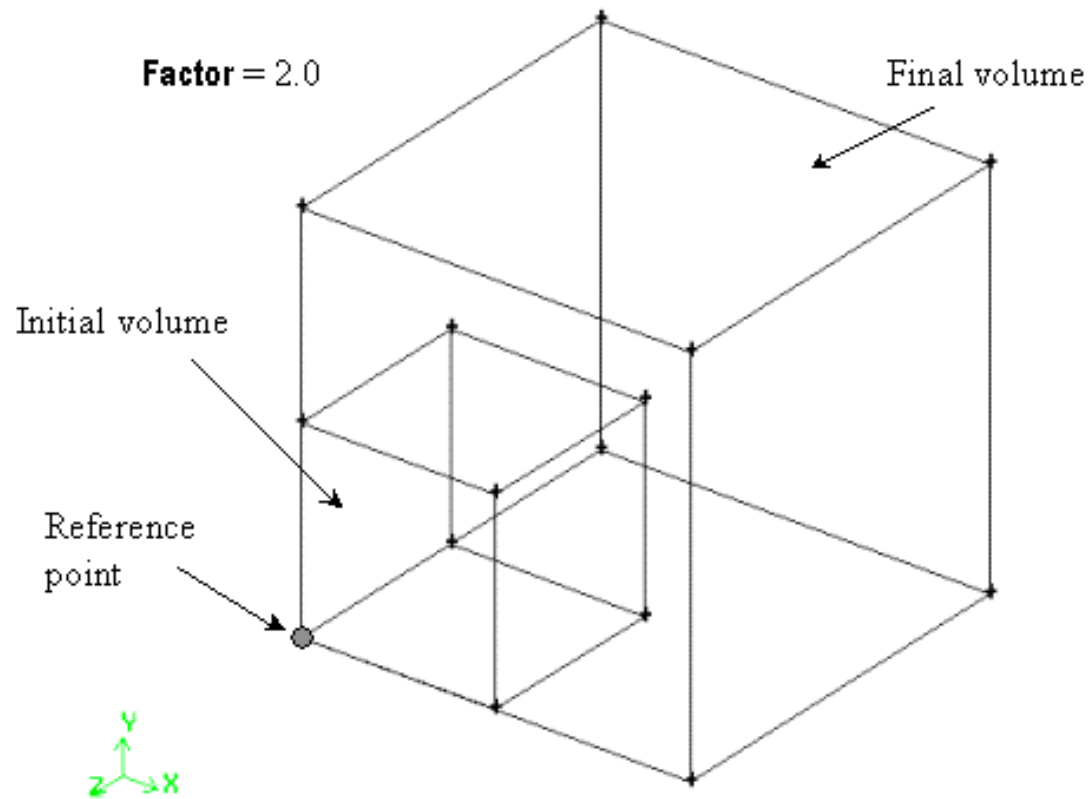
C è il fattore scalare per x ed è chiamato costante di proporzionalità. Ad esempio raddoppiare una distanza significa scalare la distanza per un fattore di 2

$$L_1 = L_0 \cdot c \quad \text{Lunghezza}$$

$$A_1 = A_0 \cdot c^2 \quad \text{Superficie}$$

$$V_1 = V_0 \cdot c^3 \quad \text{Volume}$$

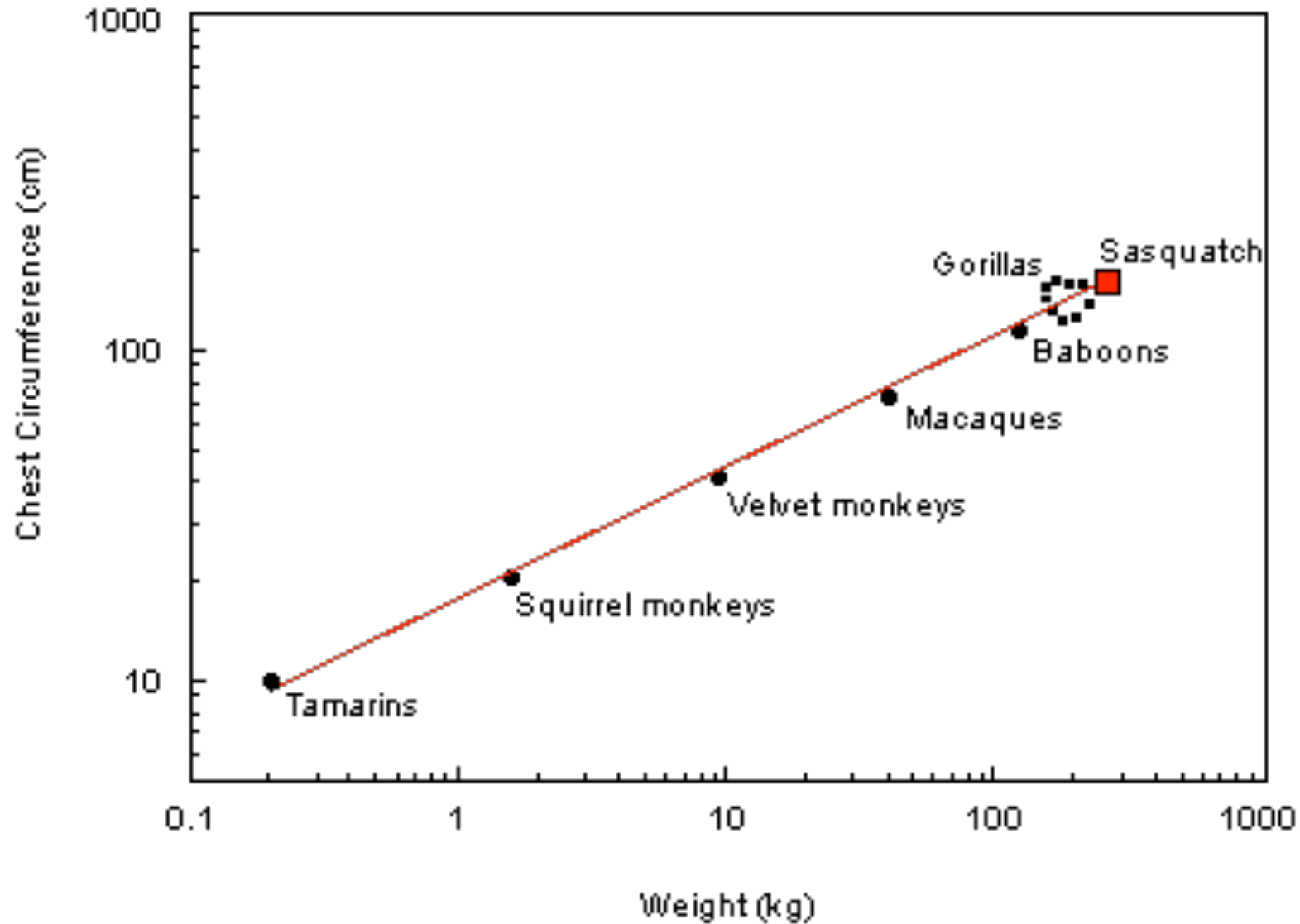
Oggetti geometricamente simili



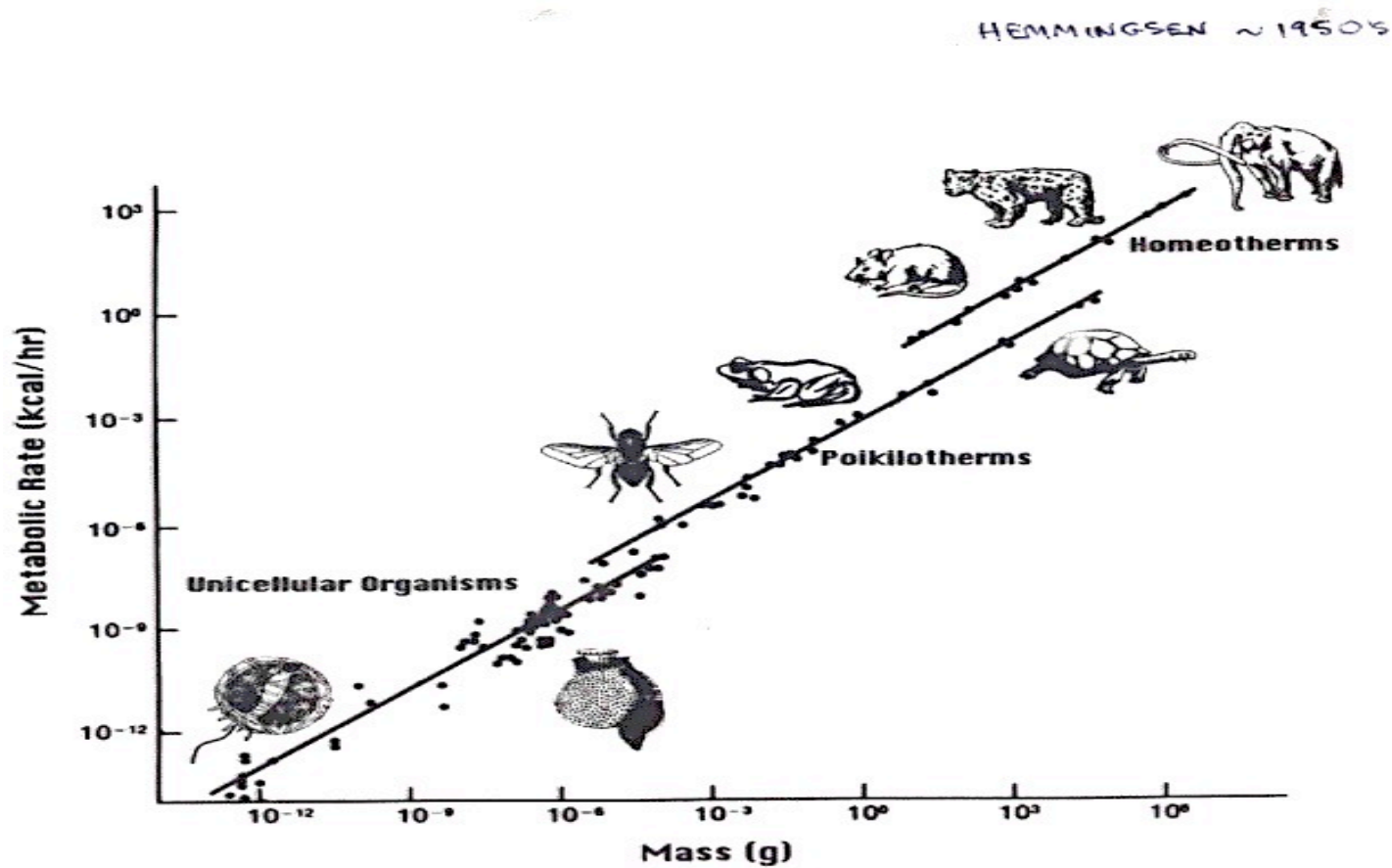
Il mondo animale

- Che cosa hanno a che vedere i rapporti scalari con il mondo animale?
- Definiscono attraverso le loro proporzioni le loro funzioni e i movimenti che possono eseguire.

Primate fattore scalare



Metabolismo Massa Fattore Scalare



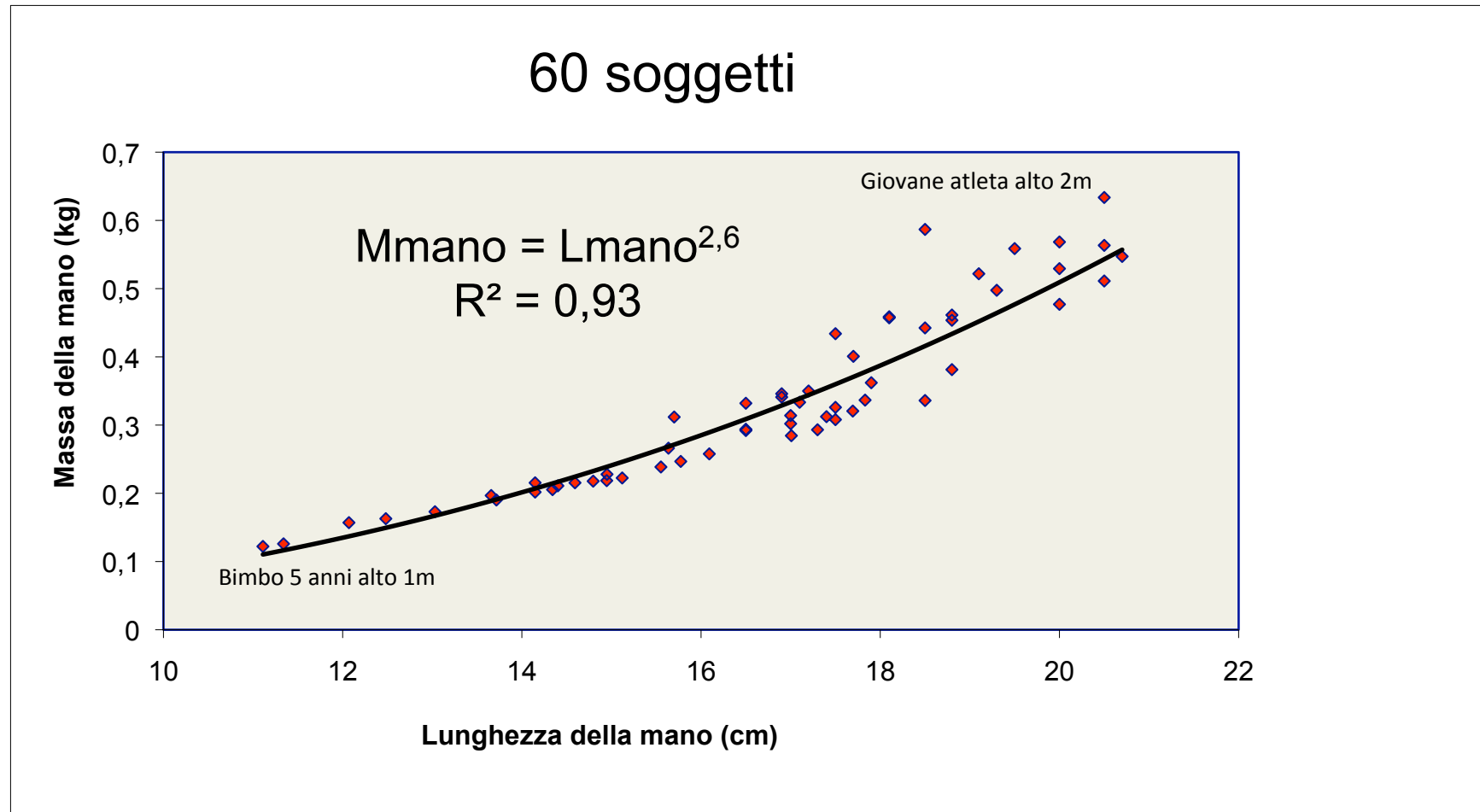
Allometric scaling of metabolic rate for a selection of homeotherms (birds and mammals), poikilotherms (fish, reptiles, amphibians, and invertebrates), and unicellular organisms. The solid lines all have a slope of .75. Modified from Hemmingsen, 1960.

Il corpo umano

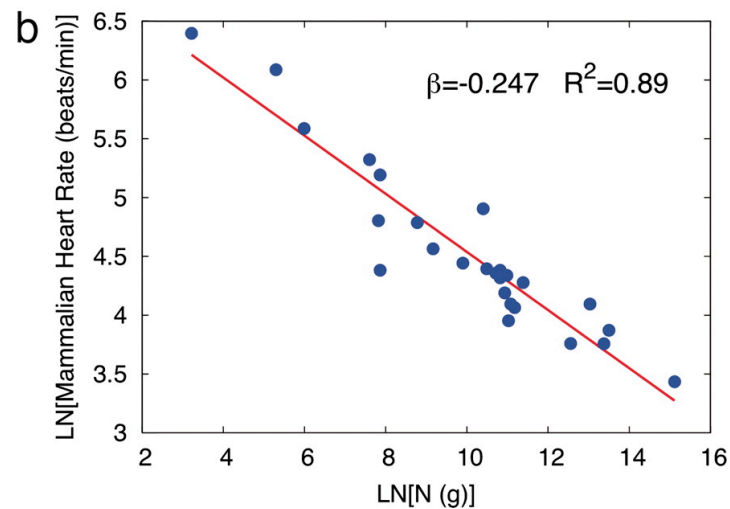
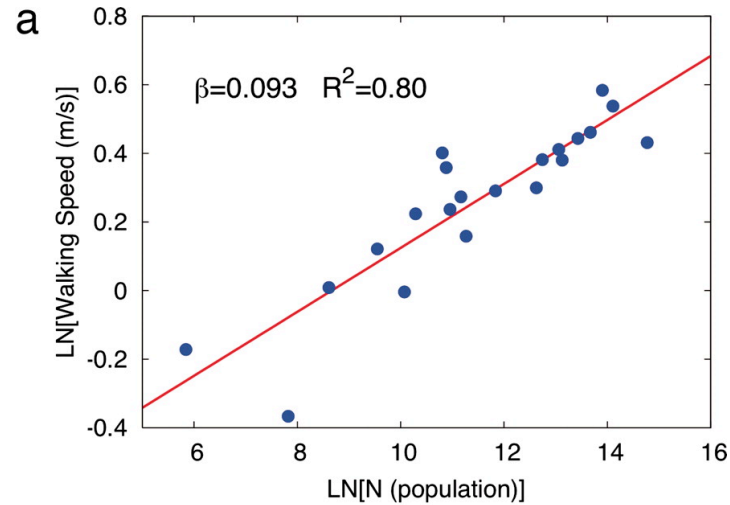
- Che cosa hanno a che vedere le dimensioni con il corpo umano?
- Definiscono le loro dimensioni e le capacità che possono esprimere

Mani geometricamente simili?

$$M=L^3$$



La cadenza del passo aumenta all'aumentare della grandezza della città in contrasto con la vita biologica dove la velocità (esempio battito cardiaco) diminuisce all'aumentare della grandezza dell'organismo



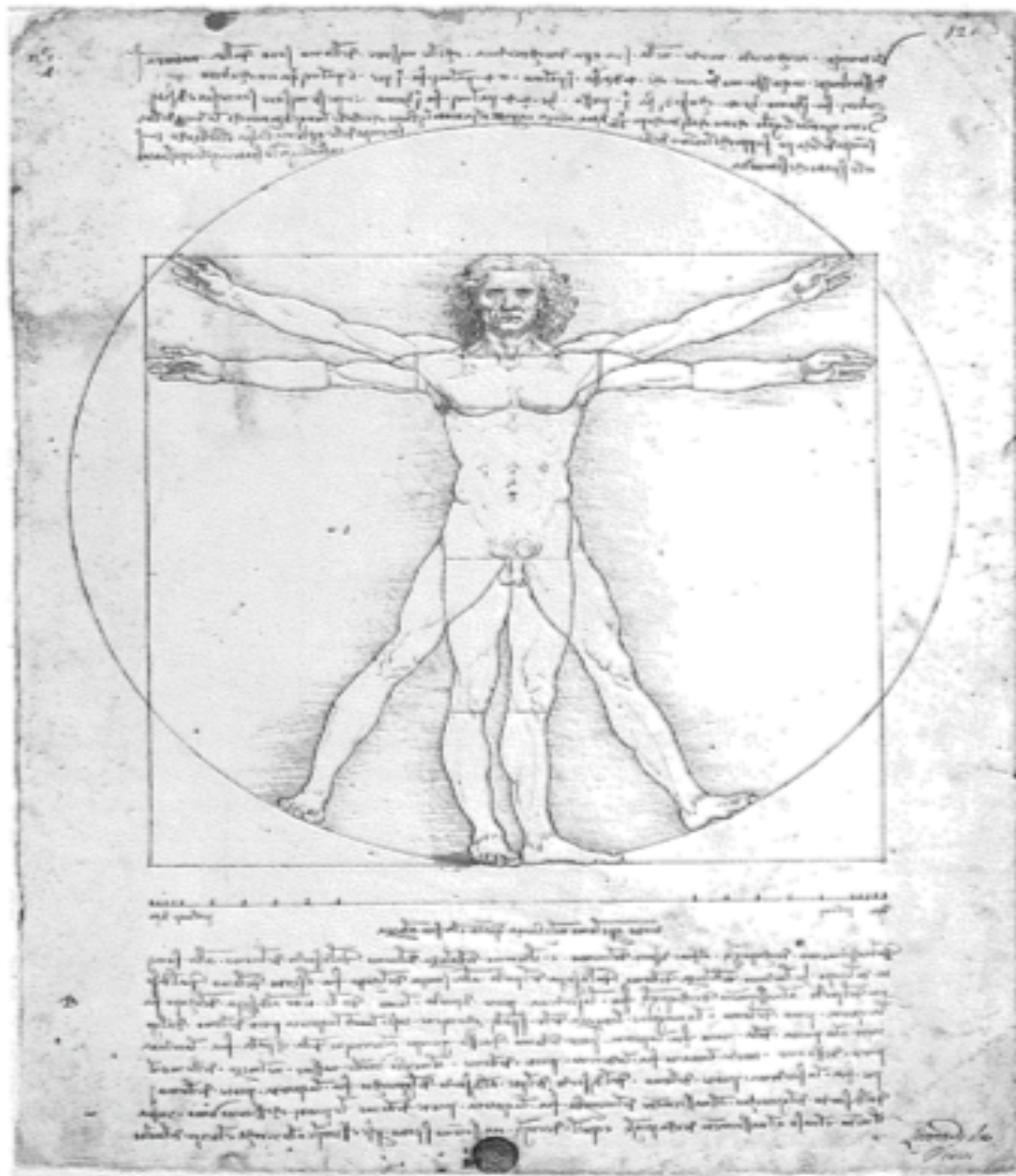
Proporzioni e dimensioni

- Equazioni allometriche: con misure diverse
- Supponiamo che le dimensioni di due parti di un organismo, x e y , siano legate da una certa relazione:
$$y = bx^a$$
- $Y = bx^a$ dove a e b sono costanti
- Questa è una equazione esponenziale.
 - Se: $a=0$
- Y è sempre uguale alla costante b a prescindere dal valore di x
- Esempio biologico: relazione grandezza cellule grandezza animale

Proporzioni e dimensioni

- Equazioni isometriche: con misure uguali
- quando l'esponente=1
- Supponi che:
- y =apertura delle braccia
- X = altezza degli umani adulti
- $a=1$
- In questo caso l'apertura delle braccia è direttamente proporzionale all'altezza del soggetto

Uomo di Vitruvio, dai quaderni di Leonardo da Vinci.



L'analisi dimensionale e il concetto di scala

- Considerare una formula a-dimensionale scalata significa utilizzare uno strumento matematico che misura ad esempio una funzione ma indipendentemente dalle dimensioni dei soggetti sotto esame, questo significa che:
 - Può essere applicato sia a persone grandi che a persone piccole poiché la loro grandezza è già presente nell'equazione come fattore scalato

Alti e bassi

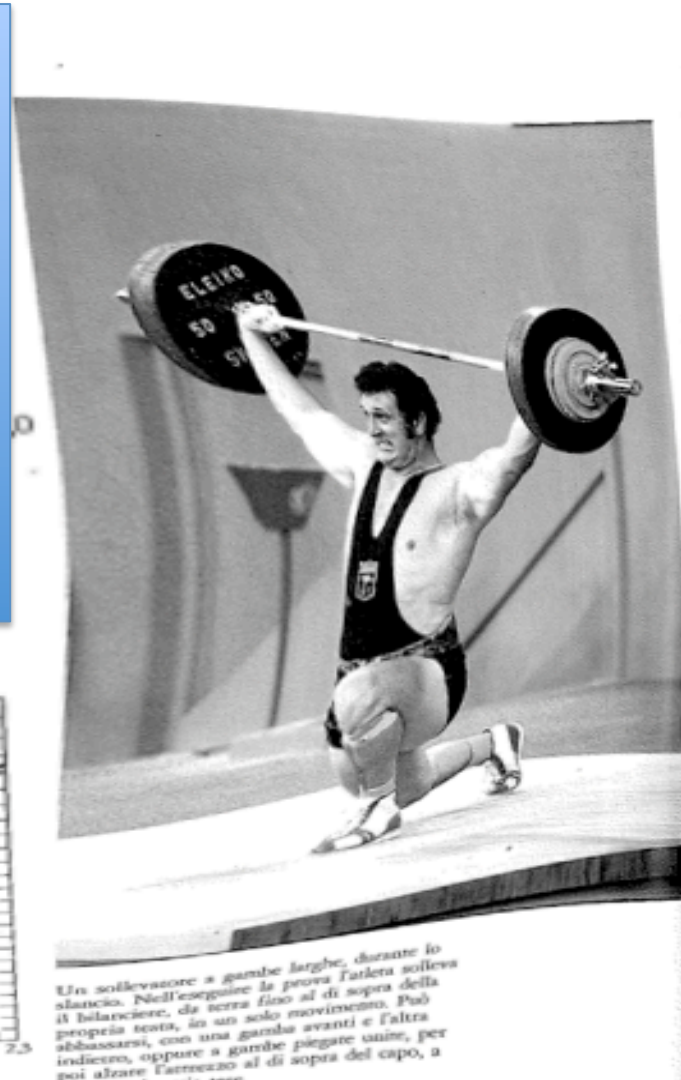
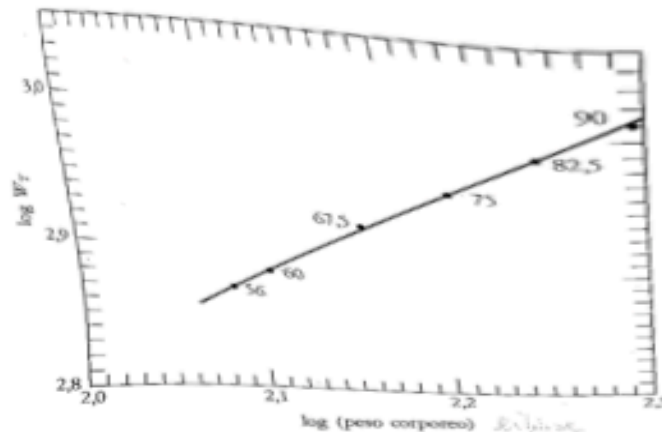
54

Robert Wadlow aveva vent'anni e misurava 2,7 m quando è stata scattata la fotografia, nel 1939. Suo padre era alto 1,79 m. Un funzionamento abnorme della ghiandola pituitaria può provocare il gigantismo nell'uomo. La crescita eccessiva si nota soprattutto nella testa e nelle gambe.



Analisi dimensionale nello sport

Peso sollevato in funzione del peso corporeo
I numeri sulla regressione indicano la categoria espressa in kg



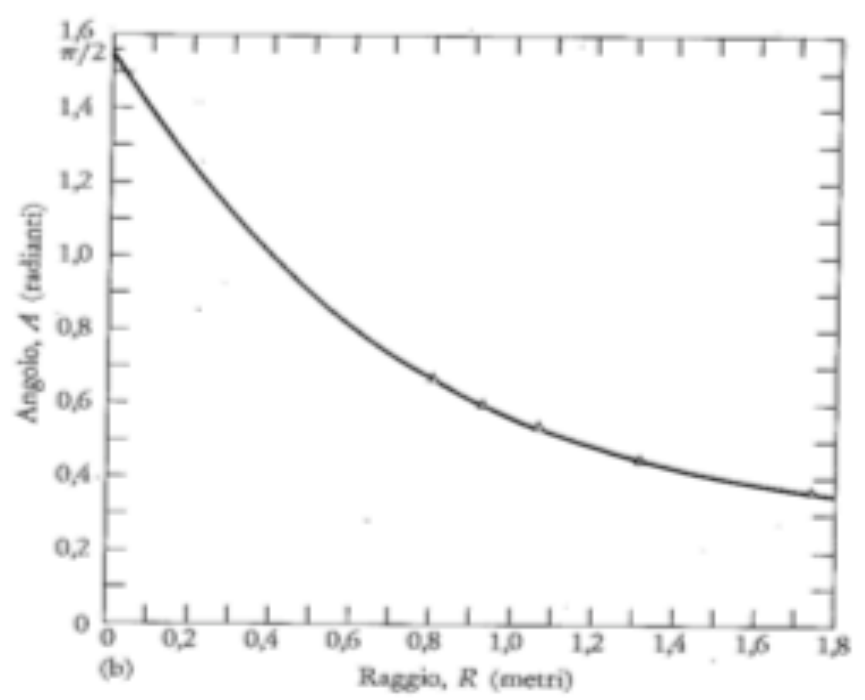
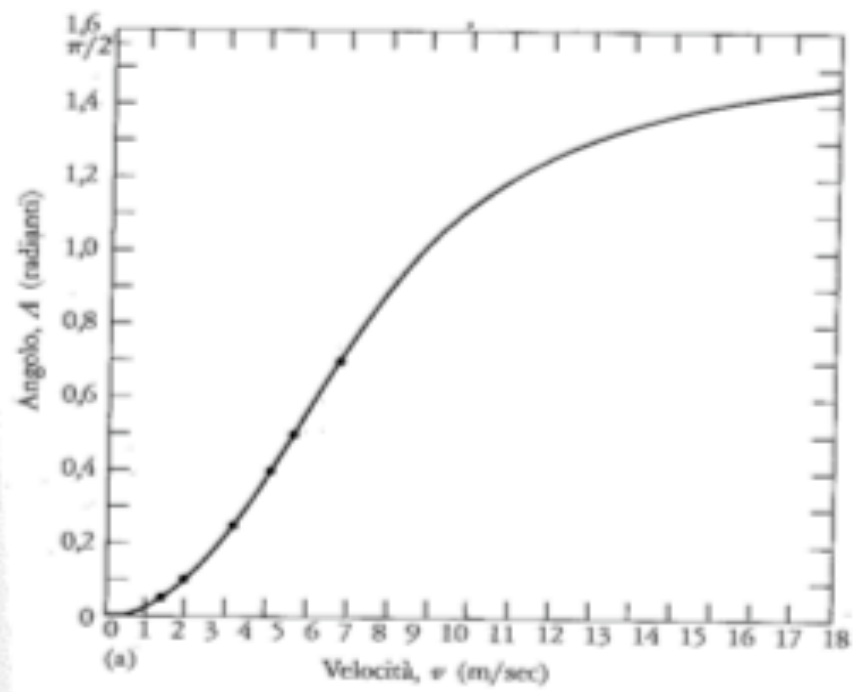
Ma a che cosa ci può servire oltre che a capire relazioni fra funzioni e grandezze?

Una bicicletta che corre a velocità v su un cerchio di raggio R s'inclina di un angolo λ rispetto alla verticale.



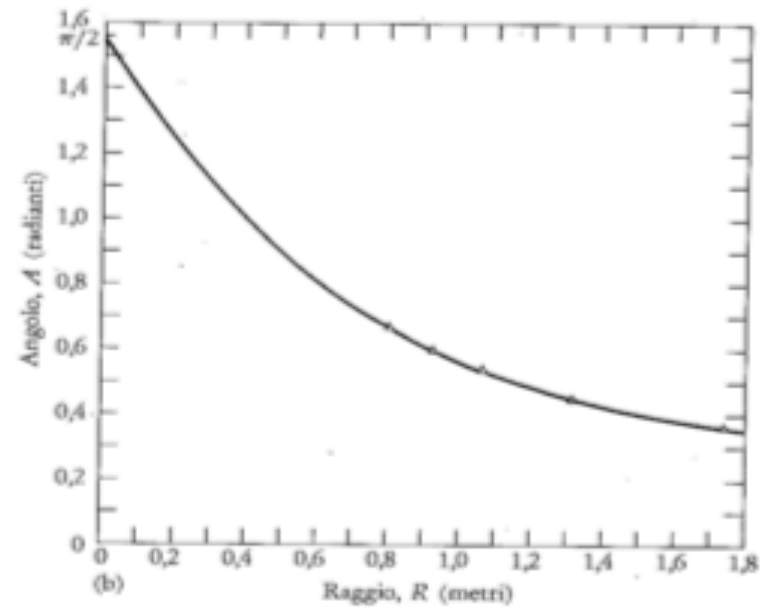
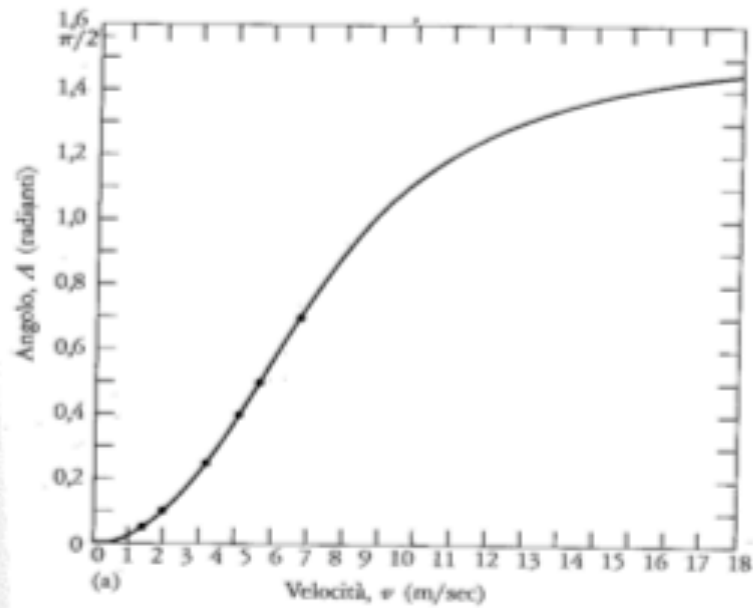
Pedalare in cerchio

- Mentre giriamo su di un cerchio di raggio R ad una velocità costante v la bicicletta si inclina di un angolo A
- Possiamo:
- A- mantenere R costante e variare v
- B- mantenere costante v e cambiare R
 - Dopo diverse misurazioni abbiamo due curve:
 - In una l'angolo A aumenta con v , nell'altra A diminuisce all'aumentare di R



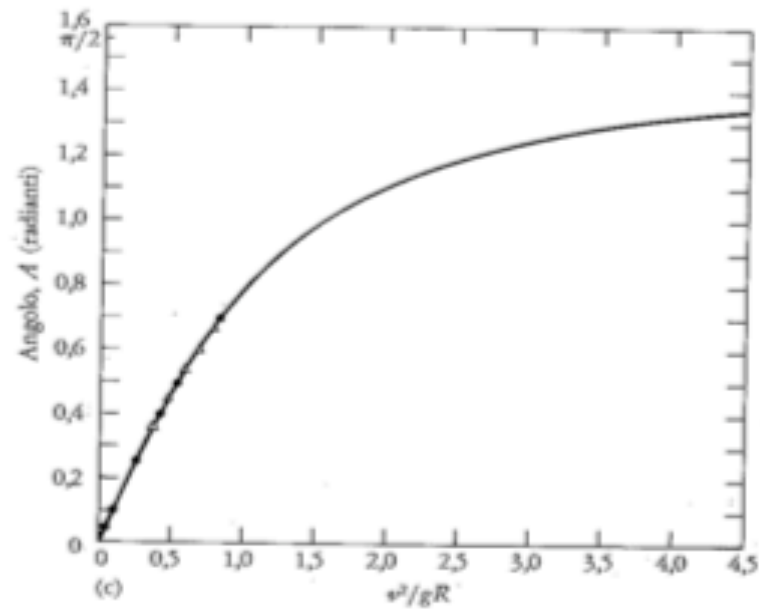
Come fare per calcolare A in funzione di v e di R ?

- Si dovrebbero fare un infinito numero di misure per ottenere un certo numero di curve e poi interpolarle fra loro!!!
- Troppo dispendioso!
- L'analisi dimensionale può risolvere il problema.



Schemi dei risultati ottenuti con gli esperimenti sulle biciclette: (a) angolo A riportato in funzione di v per R costante; (b) angolo A riportato rispetto a R per v costante; (c) angolo A riportato rispetto al gruppo adimensionale v^2/gR , in cui tutti i dati si dispongono su un'unica curva.

$$\frac{v^2}{gR}$$



Relazione a-dimensionale

- Numero puro

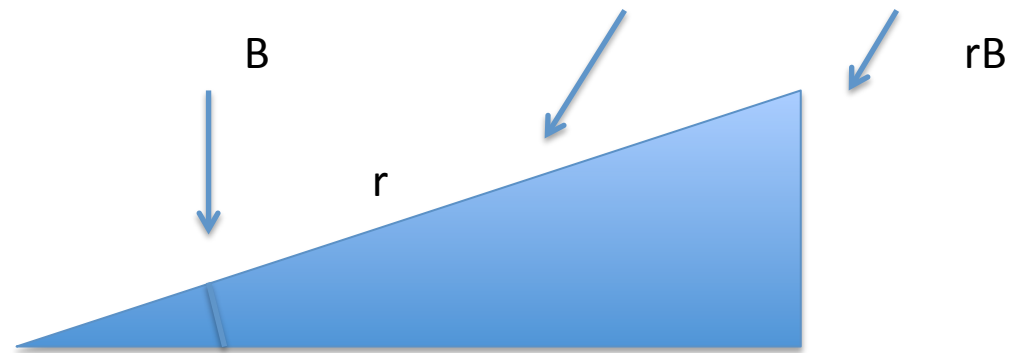
$$\frac{v^2}{gR}$$

- Tutte le dimensioni si elidono!

Quale la sua utilità?

- Ora possiamo stabilire a caso i valori di v e R utilizzare la formula e dedurre A dal grafico
- Non siamo più costretti a fare un gran numero di esperimenti
- Inoltre abbiamo inserito g che ci permetterebbe di calcolare la relazione anche sulla luna!

Gli angoli sono a-dimensionali



$$B = rB/r \quad L/L$$

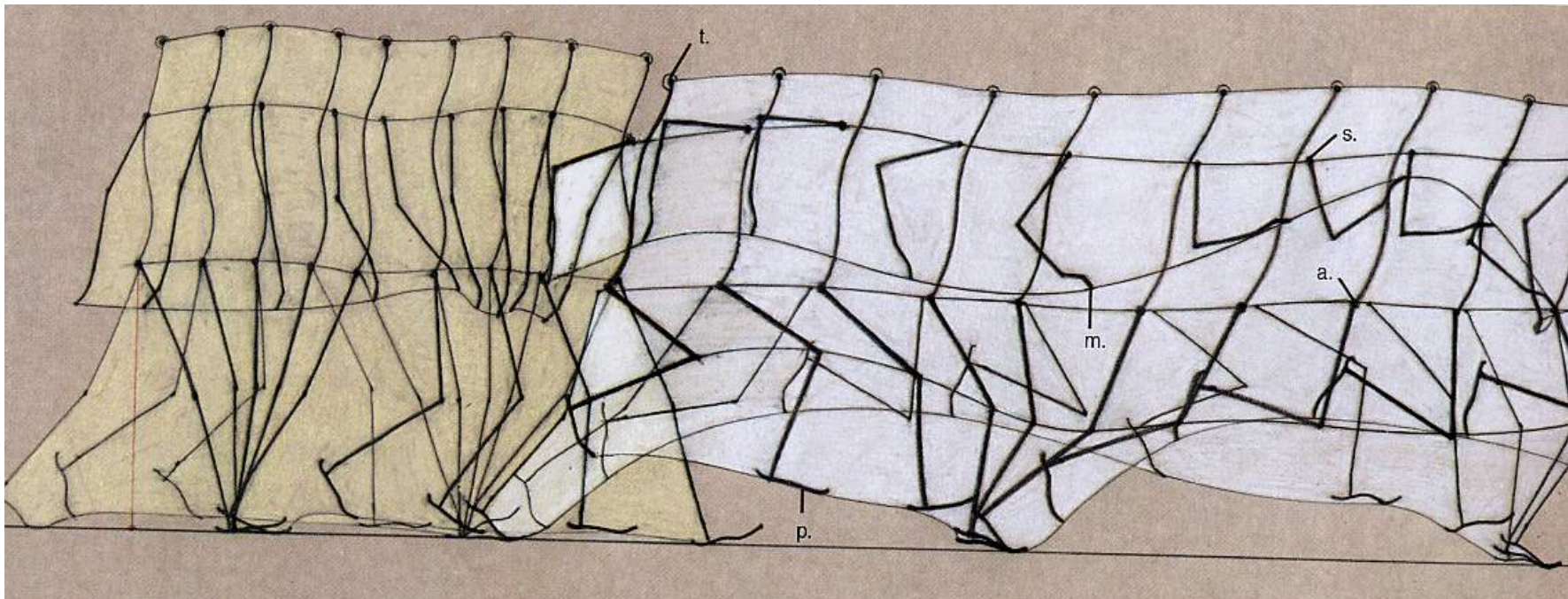
Problema: Perché ad una certa velocità anziché camminare corriamo?

- Variabili importanti:
- Velocità (v)
- g (gravità)
- L lunghezza arto inferiore

Correre è + dispendioso!

- Perché dobbiamo correre anziché camminare più velocemente?
- I vincoli meccanici non ce lo permettono!
 - Se camminando velocemente arriviamo ad una certa velocità, siamo costretti a correre

Passaggio fra camminata e corsa la testa si alza e si abbassa



Analisi dimensionale

- Importanti variabili:

$$\frac{v^2}{gl}$$

Lunghezza arto
inferiore fattore
che scala

- Velocità, accelerazione di gravità, altezza della persona

$$v^2 = \frac{L^2}{T^2}$$

$$\frac{L^2}{T^2} \frac{1}{L} \frac{T^2}{L} = \frac{L^2 T^2}{L^2 T^2}$$

$$g = \frac{v}{T} = \frac{L}{T^2}$$

Esempio

- Gravità $9,8 \text{ m/s}^2$ $\frac{L}{T^2}$
- Adulto arto inferiore 0.8 m (L)
- cambia camminata a corsa a 2,8 m/s
- Bambino arto inferiore 0.5m (L)
- cambia camminata a corsa a 2,2 m/s

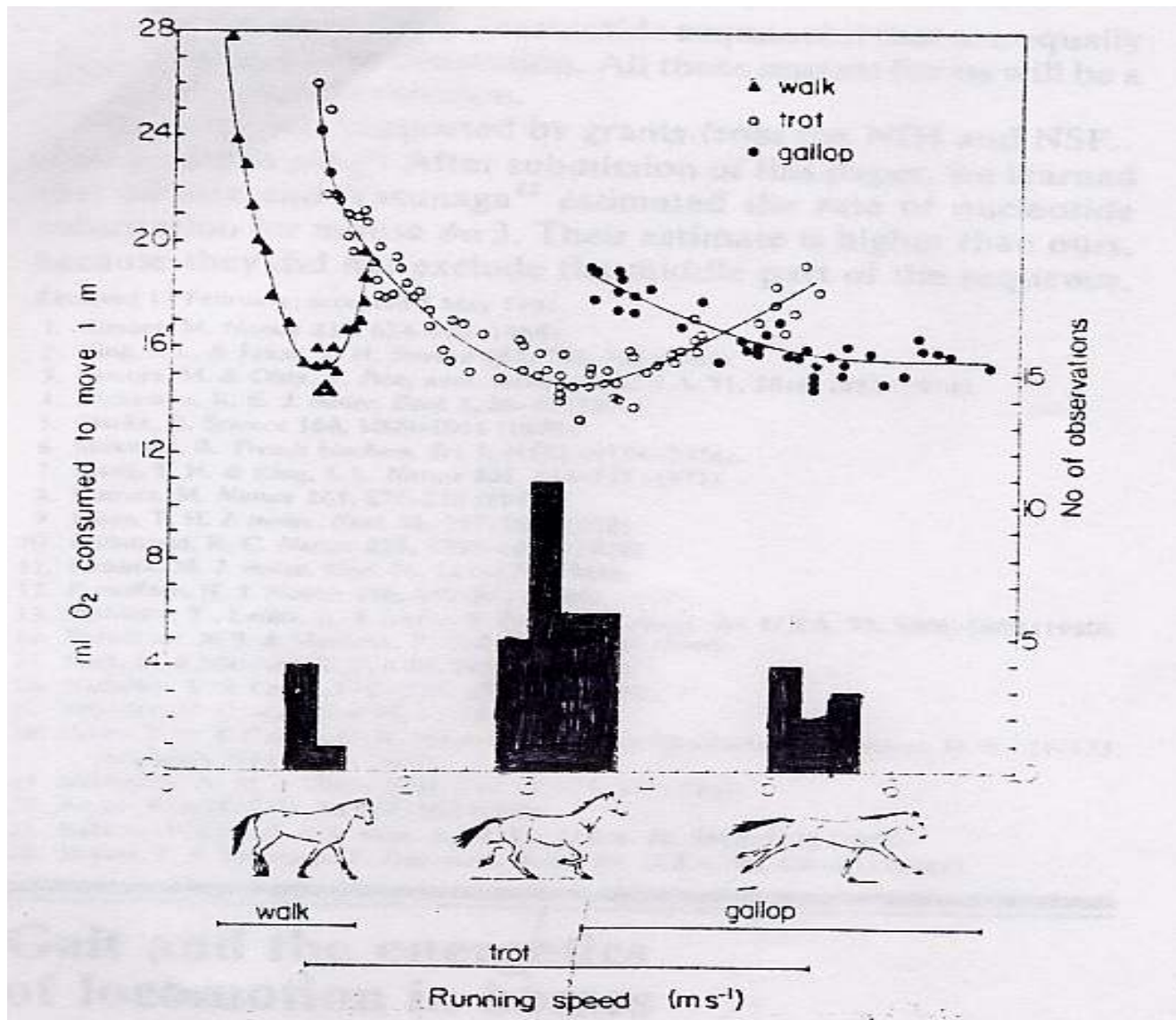
Il cambio fra camminata e corsa

- Ad una certa velocità che è scalata sui parametri corporei passiamo dalla camminata alla corsa.
 - I bambini cambiano pattern a velocità inferiori
 - Così le persone piccole
 - Che cosa fanno i marciatori?

Camminata e vincoli energetici

- Il cambio fra un pattern di movimento ed un altro è definito da vincoli anche energetici
- L'energia minima consumata è relativa alla velocità ed al pattern scelto
- Hoyt & Taylor (Nature, 1981)

Vincoli energetici



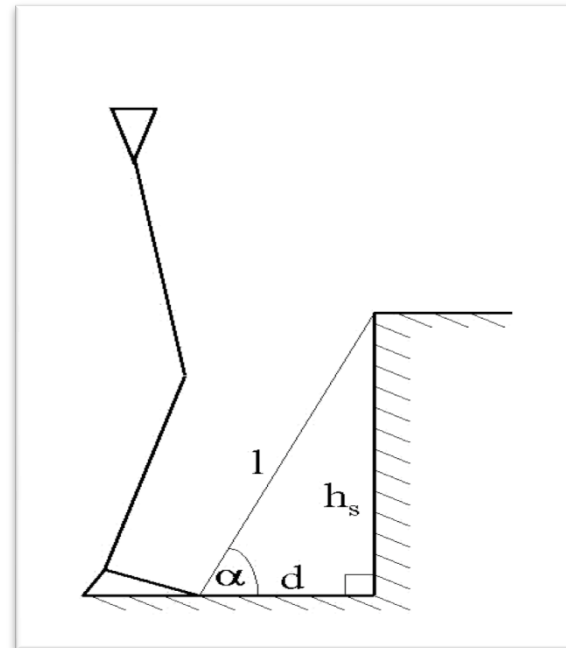
Implicazioni teoriche

- Dall'analisi dimensionale emerge che:
 - Parametri corporei e velocità scalano il movimento
 - Il movimento è definito quasi unicamente da vincoli meccanici ed energetici
 - Non risultano preponderanti vincoli percettivi ed ambientali

Salire e scendere le scale

La percezione delle capacità motorie

- Warren (1987): Lscalino/Lgamba
- Kontzac et al. (1992): anziani non seguono lo stesso rapporto scalare

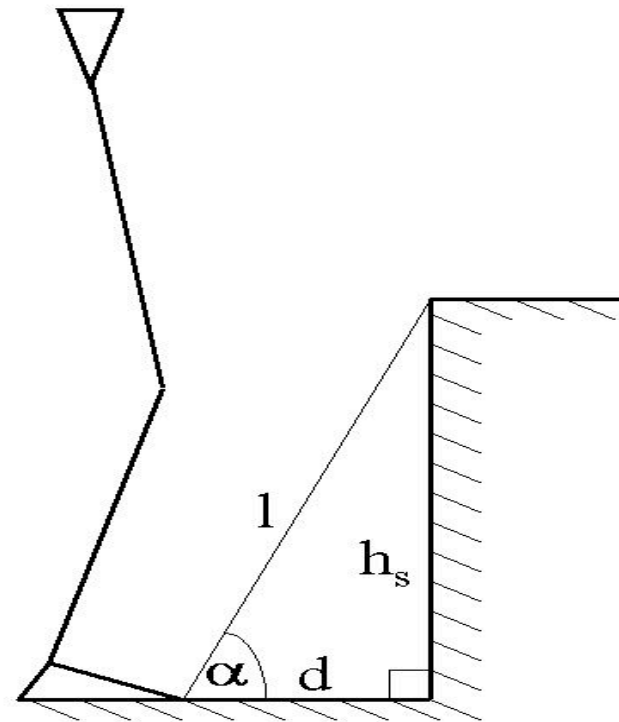


- Esiste una relazione stabile nello scegliere e nel salire il gradino più alto che tenga conto dei parametri corporei e delle capacità motorie?

Variabili da considerare

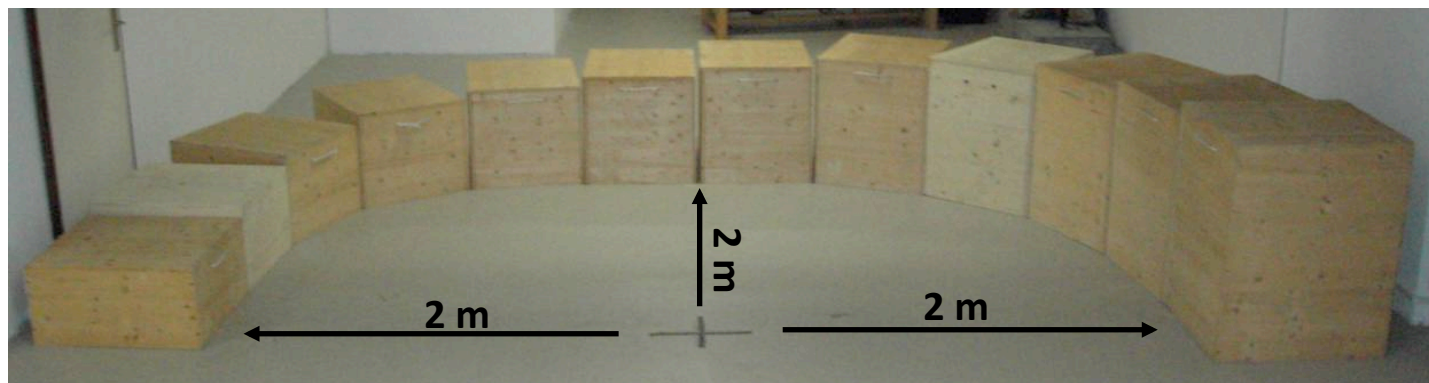
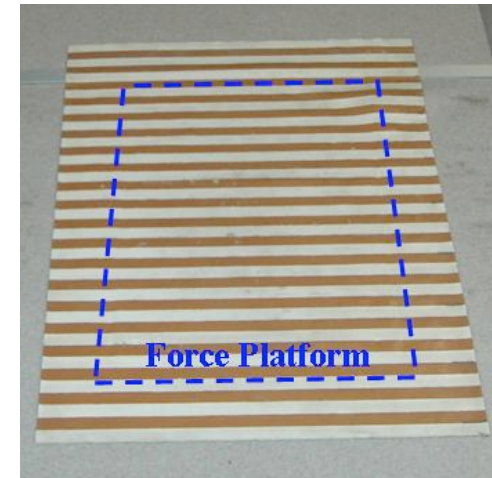
- Altezza gamba
- Altezza scalino- h_s
- Distanza dallo scalino- d
- Ipotenusa- l
- Angolo- α

$$\text{sen}\alpha = h_s / l = \text{Angolo } \alpha$$



Le scale usate e la pedana

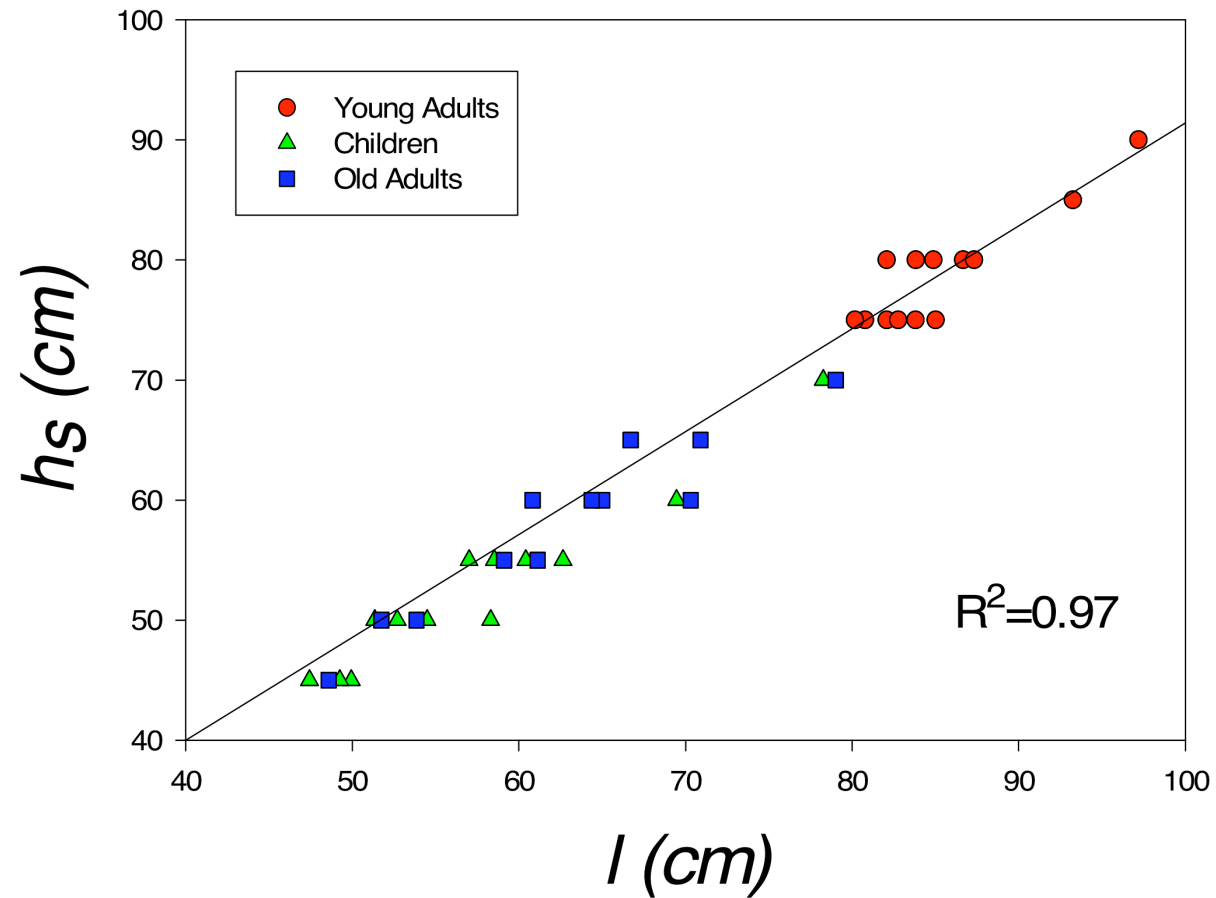
- 14 scalini in legno non pitturato (colore naturale)
 - Larghezza 50 cm, profondità 60 cm;
 - Altezza da un 35 a 90 cm, incremento di 5 cm;
 - Disposti a semicerchio in ordine crescente (raggio 2 m)



Leg Length, Height Achieved and Perceived Scaled and not Scaled

Grou	Leg Length (cm)	Achieved (cm)	Perceived (cm)	Achieved/L	Perceived/L
Young					
M	78.5	79.2	72.7	1	0.93
<i>SD</i>	<i>2.4</i>	<i>4.4</i>	<i>4.8</i>	<i>0.05</i>	<i>0.06</i>
Older					
M	77.7	57.7	52.3	0.74	0.67
<i>SD</i>	<i>5.9</i>	<i>6.9</i>	<i>6.3</i>	<i>0.07</i>	<i>0.06</i>
Children					
M	57.7	52.6	50.7	0.89	0.88
<i>SD</i>	<i>7.7</i>	<i>6.9</i>	<i>8.8</i>	<i>0.07</i>	<i>0.15</i>

Fattore scalare Ipotenusa Altezza



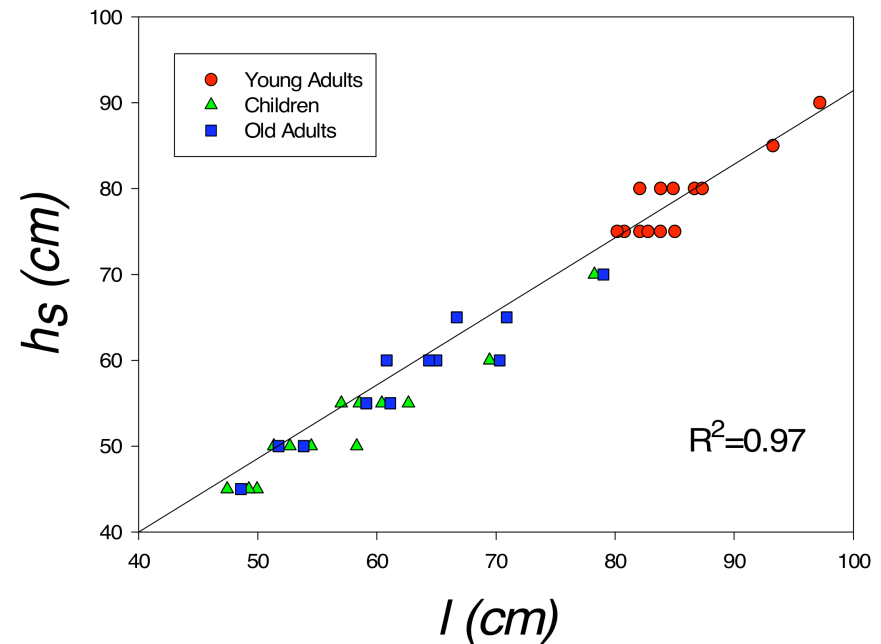
Come calcolare l'angolo α

L'inclinazione

Della retta:

h_s/I unità cm/cm

$$\mathbf{\text{sen}\alpha = h_s/I}$$

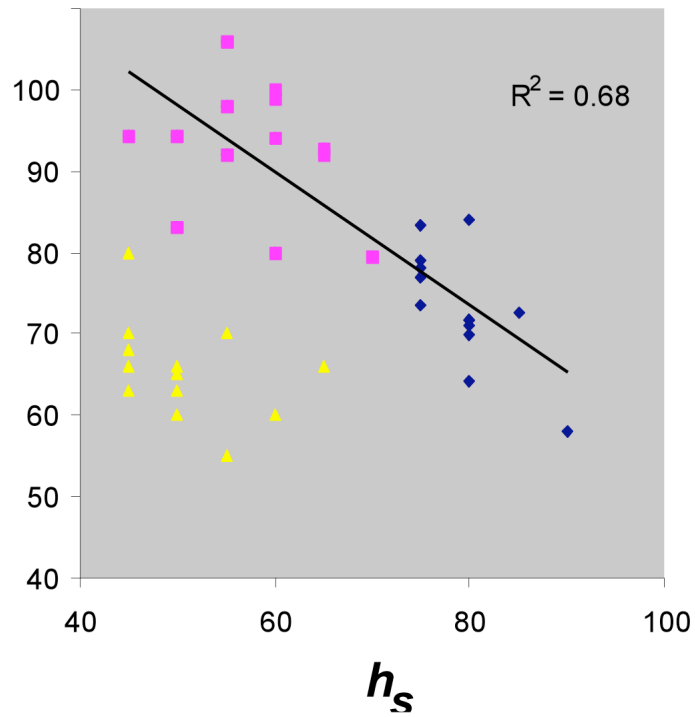


L'angolo α è una costante percettivo-motoria

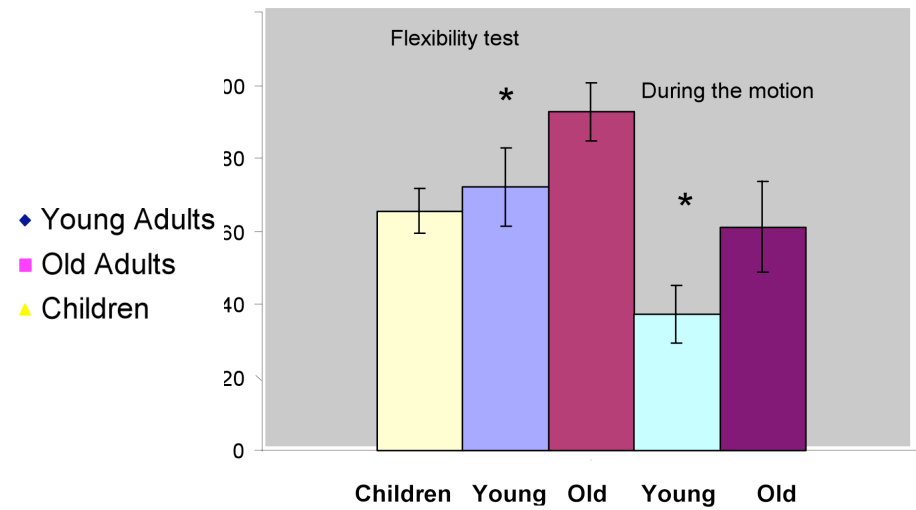
- Il rapporto fra l'altezza salita e l'ipotenusa è fortemente lineare ($R^2=0.97$) quindi il valore della linea è da considerare costante quindi costante è l'angolo α

Flessibilità

Hip Angle (θ)



Angle (θ)



Discesa delle scale

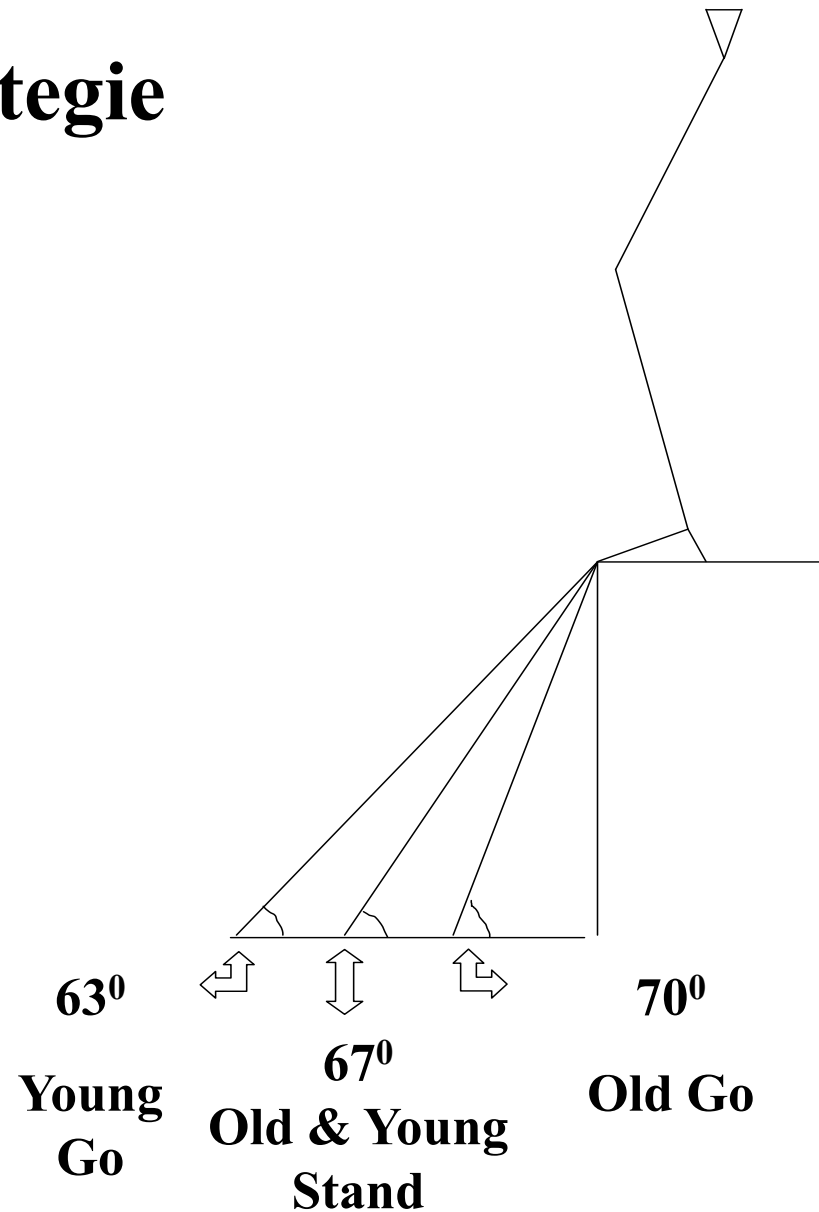
- 11 Anziani (età $M=61.6$, $SD=7.3$)
- 14 Giovani (età $M=22.4$, $SD=1.6$).
- Due condizioni:
 - Scendi e stai
 - Scendi e vai (raggiungi quel punto a 3m di distanza)

Discesa delle scale

- 11 Anziani (età $M=61.6$, $SD=7.3$)
- 14 Giovani (età $M=22.4$, $SD=1.6$).
- Due condizioni:
 - Scendi e stai
 - Scendi e vai (raggiungi quel punto a 3m di distanza)

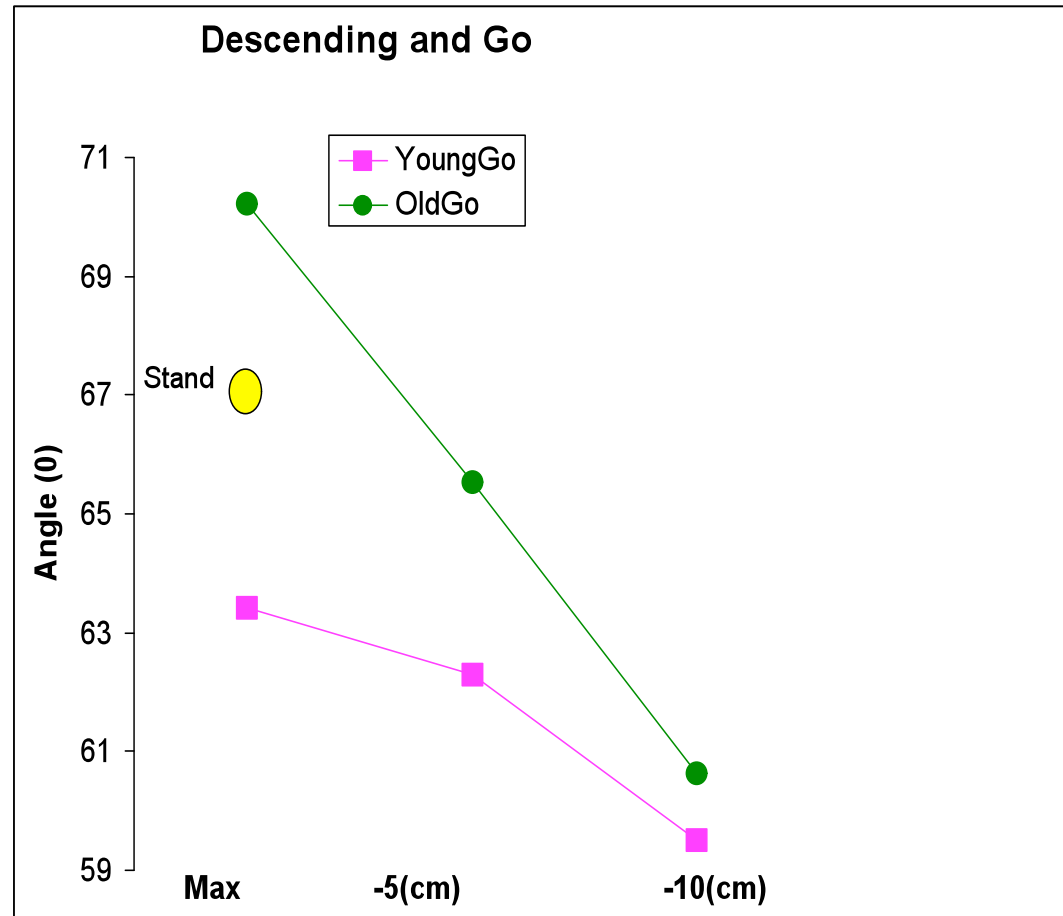
Le due strategie

- **Scendi e stai:** stesso angolo
- **Scendi e vai:** anziani atterrano più vicino allo scalino giovani più lontano



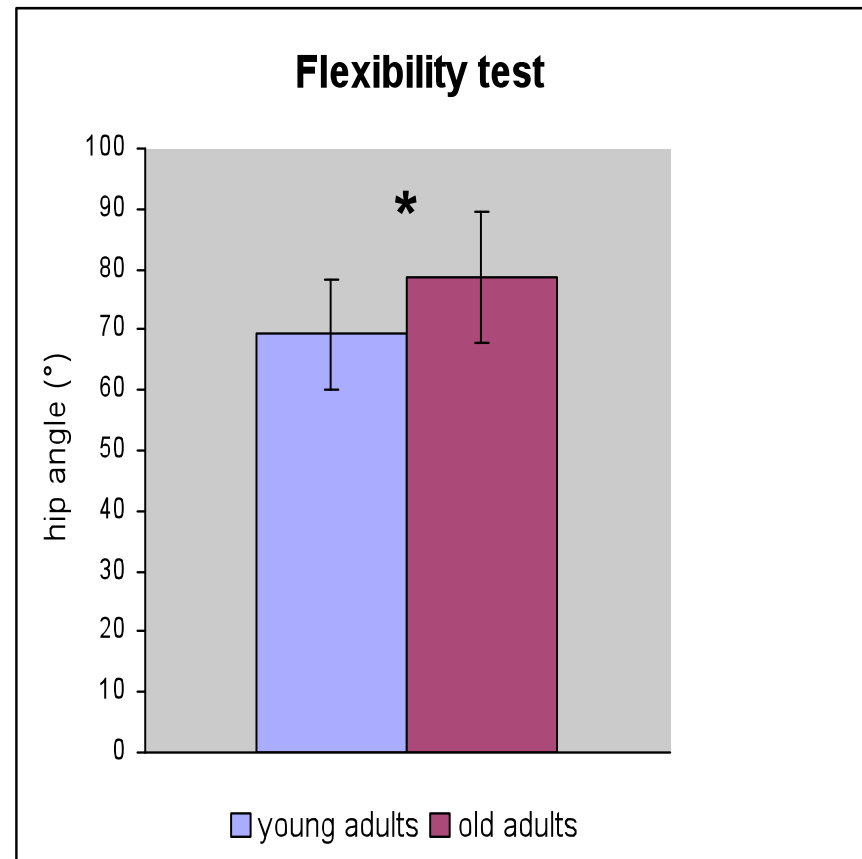
Le due strategie di movimento

- **Scendi e stai:** nessuna differenza fra I due gruppi
- **Scendi e vai:**
 - Diversi gli angoli scelti fra anziani e giovani



Test di flessibilità

Anziani presentano una flessibilità al livello delle anche inferiore ai giovani



Salire e scendere le scale

- Per ambedue I compiti motori (salire o scendere) l'angolo rimane lo stesso
- Le altezze delle scale scelte per scendere sono inferiori sia per I giovani che per gli anziani rispetto alle scale scelte per salire
- Un diverso compito motorio (anzichè scendi e stai scendi e vai) comporta un aumento della difficoltà e un cambio generale della strategia motoria adottata.

Due strategie diverse

- Anziani più in difficoltà a gestire la loro quantità di moto: scelgono strategie più conservative per mantenersi più stabili